平均場ゲーム方程式のCole-Hopf変換とFictitious Play反復による数値計算

2022.09.07 JSIAM年会

井上大輔[1] 伊藤優司[1] 柏原崇人[2] 齊藤宣一[2] 吉田広顕[1]

1: 株式会社豊田中央研究所 2: 東京大学大学院数理科学研究科

アウトライン

- マルチエージェント制御問題に対応する平均場ゲームの紹介
- Cole-Hopf変換とFictitious Play反復を用いた変形
- 差分スキームの提案
- スキームの収束解析
- 数値例

マルチエージェントの制御問題

- 制御対象：$i = 1, \ldots, N$ の確率微分方程式に従うエージェント

$$\mathrm{d}x_i(t) = [f(x_i(t)) + a_i(t)]\mathrm{d}t + \sqrt{2\nu}\mathrm{d}w_i(t),\ t \in [0, T]$$

- 目標：エージェント同士のNash均衡$\bar{a}_i$を探すこと

$$\begin{aligned} J(\bar{a}_i \mid \bar{a}_{i^-}) &\leq J({}^\forall a_i \mid \bar{a}_{i^-}) \quad \forall i = 1, \ldots, N, \\ J(a_i \mid a_{i^-}) &:= \int_0^T \left[\frac{1}{2}\|a_i(t)\|^2 + g\left(x_i(t), m(x, t)\right)\right] \mathrm{d}t + v_T(x_i(T)), \end{aligned}$$

- $t \in [0, T]$: 時刻
- $x_i \in \mathbb{R}^n$: 状態
- $a_i \in \mathbb{R}^n$: 制御入力
- $w_i \in \mathbb{R}^n$: 標準Wiener過程に従う雑音
- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$: $\mathcal{C}^1$級関数
- $\nu > 0$: 雑音係数

マルチエージェントの制御問題

- 制御対象：$i = 1, \dots, N$ の確率微分方程式に従うエージェント

$$\mathrm{d}x_i(t) = [f(x_i(t)) + a_i(t)]\mathrm{d}t + \sqrt{2\nu}\mathrm{d}w_i(t),\ t \in [0, T]$$

- 目標：エージェント同士のNash均衡$\bar{a}_i$を探すこと

$$J(\bar{a}_i \mid \bar{a}_{i^-}) \leq J({}^\forall a_i \mid \bar{a}_{i^-}) \quad \forall i = 1, \dots, N,$$
$$J(a_i \mid a_{i^-}) := \int_0^T \left[\frac{1}{2}\|a_i(t)\|^2 + g\left(x_i(t), m(x, t)\right)\right] \mathrm{d}t + v_T(x_i(T)),$$

- a_{i^-} : a_i 以外の全ての制御入力
- $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: 第一変数について$\mathcal{C}^2$級, 第二変数について$\mathcal{C}^1$級の関数
- $m(x, t)$: 状態$x_i(t)$の経験密度分布
- $v_T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: $\mathcal{C}^1$級関数

平均場ゲーム（Mean Field Game, MFG）

- MFG方程式: $N \to \infty$の極限を考えることで近似的に得られるPDE [Lasry&Lions, 2007]

$$
\begin{aligned}
&-\partial_t v(x,t) = \partial_x v(x,t)^\top f(x) + g(x, m(x,t)) - \frac{1}{2}\partial_x v(x,t)^\top \partial_x v(x,t) + \nu \partial_{xx} v(x,t), \\
&\partial_t m(x,t) = -\partial_x \cdot \{[f(x) - \partial_x v(x,t)] m(x,t)\} + \nu \partial_{xx} m(x,t), \\
&v(x,T) = v_T(x),\ m(x,0) = m_0(x)
\end{aligned}
$$

  - $m : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: エージェントの密度関数、$v : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: 制御入力のコスト関数

命題 [Cardaliaguet 2010]

MFGの解vに対して$a_i^*(t) = -\partial_x v(x_i(t), t)$はNash均衡を適切に近似する。すなわち、 ある$\lim_{N\to\infty} \epsilon(N) = 0$かつ$\epsilon({}^\forall N) \geq 0$を満たす関数$\epsilon$が存在し次を満たす：

$$
J(a_i^* \mid a_{i^-}^*) \leq J({}^\forall a_i \mid a_{i^-}^*) + \epsilon(N) \qquad \forall i = 1, \ldots, N.
$$

MFGの数値計算の課題と既存研究

MFGの数値計算の難しさ

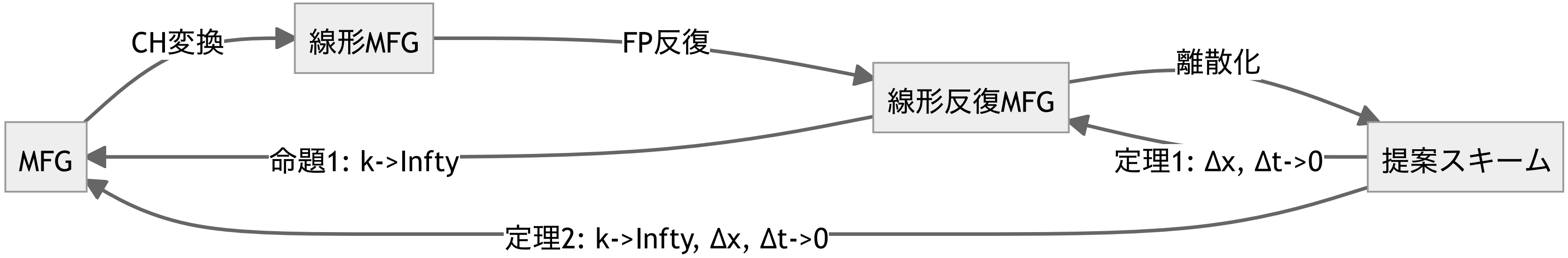
1. それぞれの方程式が非線形である
2. 変数vとmが相互依存しており、また時空間での初期値問題になっていない

これまでの研究

- いずれも**収束性解析が完全でない**か、**スキームの実装が容易でない**
  - [Achdou et al. 2010] : ForwardとBackwardの差分計算を反復する手法を提案
  - [Gueant 2012] : CH変換した系に対する反復差分解法を提案
  - [Carlini et al. 2014] : Semi-Lagrangianスキームを反復する手法を提案
  - [Ruthotto et al. 2020] : ニューラルネットを用いて変分問題を解く手法を提案

本研究の貢献

- **Cole-Hopf変換とFictitious Play反復を用いた変形により、MFGの非線形性と変数の相互依存を解消した線形反復MFGを導出した**
- **線形反復MFGに対して実装容易な差分法を提案し、提案差分法の収束性を証明した**
- **1, 2次元の制御問題に適用し、妥当な結果を得ることを確認した**



本研究の構成

Cole-Hopf変換

非線形性を解消する変換

- (m,v)に対する変数変換 $\psi(x,t)=\exp(-\frac{v(x,t)}{\nu}),\ \tilde{\psi}(x,t)=\frac{m(x,t)}{\psi(x,t)}$

$$
\begin{aligned}
\partial_t\psi(x,t) &= -f(x)^\top\partial_x\psi(x,t)-\nu\partial_{xx}\psi(x,t)+\frac{1}{\nu}g(x,m(x,t))\psi(x,t),\\
\partial_t\tilde{\psi}(x,t) &= -\partial_x\cdot(f(x)\tilde{\psi}(x,t))+\nu\partial_{xx}\tilde{\psi}(x,t)-\frac{1}{\nu}g(x,m(x,t))\tilde{\psi}(x,t),\\
\psi(x,T) &= \exp(-\frac{v_T(x)}{\nu}),\ \tilde{\psi}(x,0)=\frac{m_0(x)}{\psi(x,0)},
\end{aligned}
$$

  - 各方程式は$(\psi,\tilde{\psi})$について線形：線形移流拡散反応方程式
  - 一方、反応項のmを通じてカップリングは残る

Fictitious-Play反復

変数の相互依存性を解消する変換

- k 回目の反復時の変数の値を$\psi^{(k)}$, $\tilde{\psi}^{(k)}$と書く
- 密度関数mの過去の履歴の平均値$\bar{m}^{(k)}(x,t) = \frac{1}{k+1}\sum_{\ell=0}^{k} \psi^{(\ell)}(x,t)\tilde{\psi}^{(\ell)}(x,t)$を用いて、Fictitious-Play反復を次で定義：

$$\partial_t \psi^{(k)}(x,t) = -f(x)^\top \partial_x \psi^{(k)}(x,t) - \nu \partial_{xx} \psi^{(k)}(x,t) + \frac{1}{\nu} g(x, \bar{m}^{(k-1)}(x,t)) \psi^{(k)}(x,t),$$

$$\partial_t \tilde{\psi}^{(k)}(x,t) = -\partial_x \cdot (f(x) \tilde{\psi}^{(k)}(x,t)) + \nu \partial_{xx} \tilde{\psi}^{(k)}(x,t) - \frac{1}{\nu} g(x, \bar{m}^{(k-1)}(x,t)) \tilde{\psi}^{(k)}(x,t),$$

$$\psi^{(k)}(x,T) = \exp(-\frac{v_T(x)}{\nu}),\ \tilde{\psi}^{(k)}(x,0) = \frac{m_0(x)}{\psi^{(k)}(x,0)},$$

- k 回目の反復時の変数は$k-1$回目までの変数に依存するため、カップリングが解消される
- 経験的にもFictitious Playが計算を安定化させることは知られている [Perrin et al. 2020]

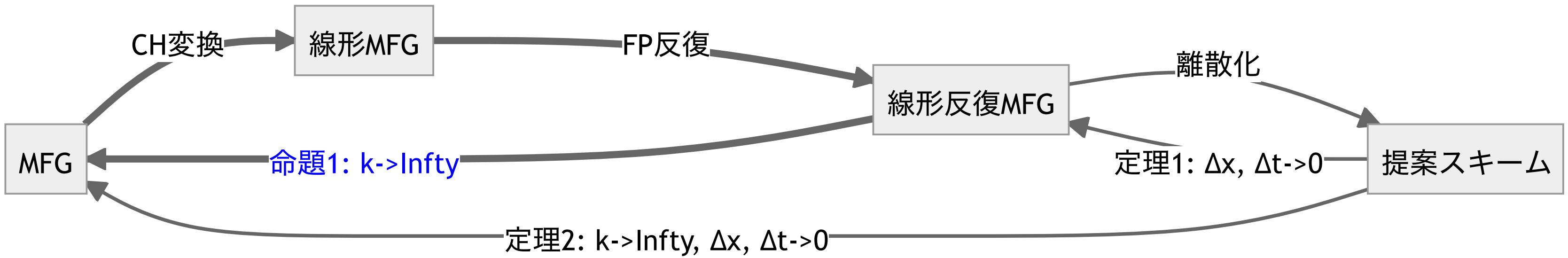
得られた線形反復方程式とMFG方程式との対応

線形反復方程式のMFG方程式への収束定理

命題1

> **線形反復方程式の解**$(\psi^{(k)}, \tilde{\psi}^{(k)})$**に対して，関数列**$\left(\psi^{(k)}\tilde{\psi}^{(k)}, -\nu \ln \psi^{(k)}\right)$**は**$k \to \infty$**でMFG方程式の解**$(v, m)$**に各点収束する.**

- 証明は時間の都合で省略。不動点定理を用いて示される
- この命題から、線形反復方程式を近似するスキームを構築すればよいことがわかる



差分スキーム

線形反復MFGに風上差分近似を適用して得られるスキーム

- $x_i = i\Delta x \ (i = 0, \ldots, N_x)$, $t_j = j\Delta t \ (j = 0, \ldots, N_t)$
- $\psi(x_i, t_j), \tilde{\psi}(x_i, t_j)$の近似値をそれぞれ$\Psi_{i,j}, \tilde{\Psi}_{i,j}$として、差分スキームを次で定義

差分スキームの収束性

差分スキームの解が変換後のMFGの解に収束することを示す定理

定理1

下記のCourant-Friedrichs-Lewy条件が満たされるとする：

$$\frac{\Delta t}{\Delta x}\sup_{x\in\Omega}|f(x)| + 2\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\nu < 1,$$

この時，kに対する単調増加関数$K(k)$, $\tilde{K}(k)$が存在し，下記を満たす：

$$\sup_{i,j}\left|\psi^{(k)}(x_i, t_j) - \Psi_{i,j}^{(k)}\right| \leq K(k)(\Delta x + \Delta t),$$
$$\sup_{i,j}\left|\tilde{\psi}^{(k)}(x_i, t_j) - \tilde{\Psi}_{i,j}^{(k)}\right| \leq \tilde{K}(k)(\Delta x + \Delta t).$$

- 証明は時間の都合で省略。各スキームの最大値原理を示した上で、誤差を追跡することで示される

差分スキームの収束性

差分スキームの解が変換前のMFGの解に収束することを示す定理

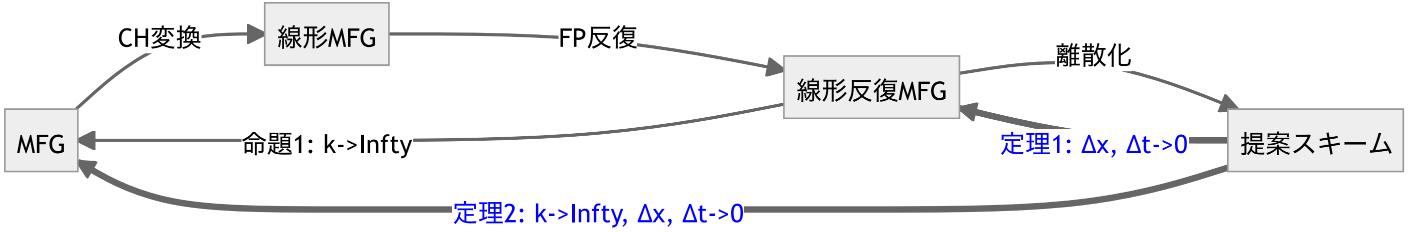
定理2

CFL条件が満たされるとする．この時，下記が満たされる．

$$\lim_{k\to\infty,\Delta t,\Delta x\to 0}\sup_{i,j}\left|m(x_i,t_j)-\Psi_{i,j}^{(k)}\tilde{\Psi}_{i,j}^{(k)}\right|=0,$$

$$\lim_{k\to\infty,\Delta t,\Delta x\to 0}\sup_{i,j}\left|v(x_i,t_j)-\left(-\nu\ln\Psi_{i,j}^{(k)}\right)\right|=0.$$

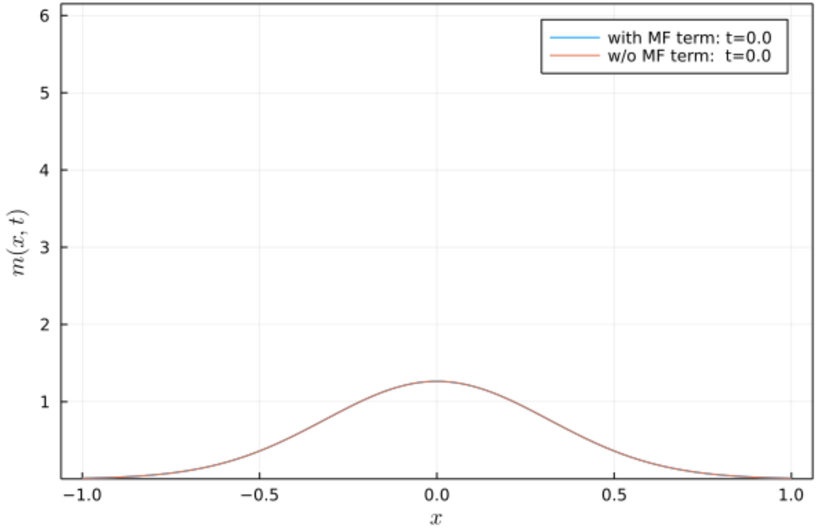
- 証明は時間の都合で省略。命題1と定理1を組み合わせることで示される



数値計算

1次元問題

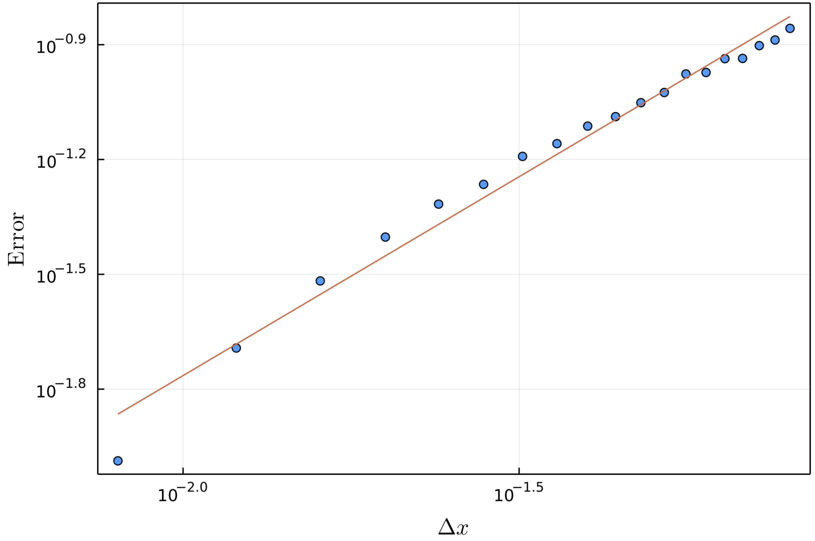
- パラメータ
  - 動特性: $f(x) = x$
  - コスト関数:
    $g(x, m) = 5x^2 + Cm(x, t)$
  - 拡散係数: $\nu = 0.005$
  - 終端値関数: $v_T(x) = 0.0$
- 目標：1. 不安定系を原点に安定化させる、2. 分布の集中を避ける
- **結果：密度のピークを避けるように分布が原点に集まる妥当な結果が得られた**



密度分布のプロット (青：密度ペナルティなし、赤：密度ペナルティあり)

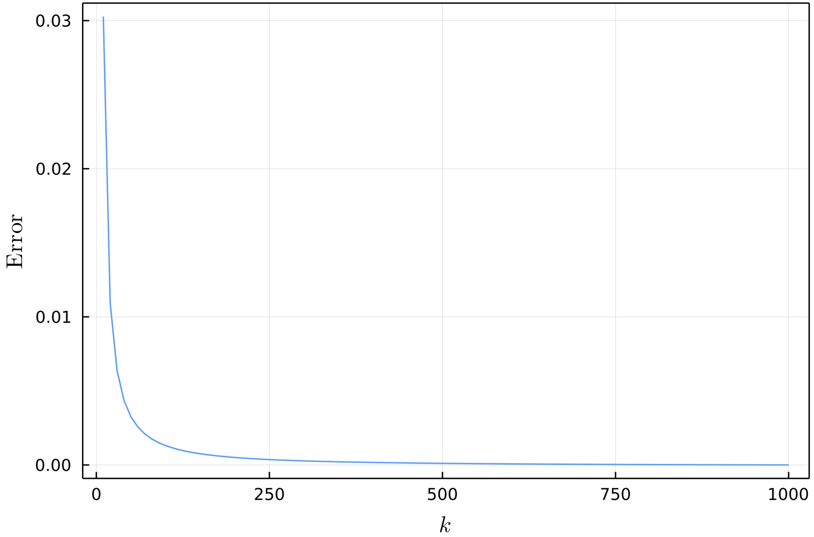
収束性の確認

十分小さい$\Delta x, \Delta t$と十分大きいkを用いた数値解を基準とした誤差をプロット



Δxに対する誤差のプロット

$k = 1000$に固定



kに対する誤差のプロット

$\Delta x = 0.04$に固定

結果：得られた収束性が数値的に確認された

数値計算

2次元問題

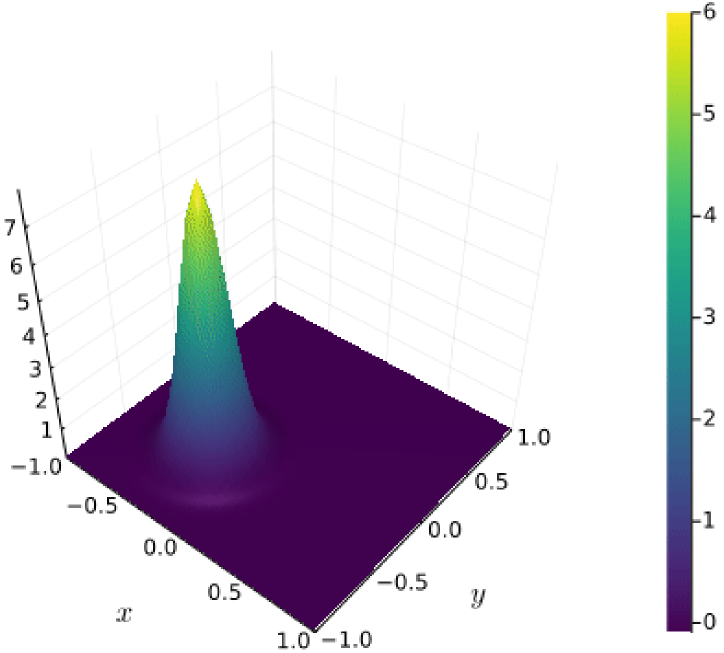
- パラメータ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 0, \\
g(x, m) &= (x - x_T)^\top Q(x - x_T) + Cm(x, t) + S \exp(-(x - x_O)^\top \Sigma_O^{-1}(x - x_O)), \\
\nu &= \mathrm{diag}(0.5, 0.5), \\
v_T(x) &= (x - x_T)^\top Q_T(x - x_T) + S_T \exp(-(x - x_O)^\top \Sigma_O^{-1}(x - x_O)).
\end{aligned}
$$

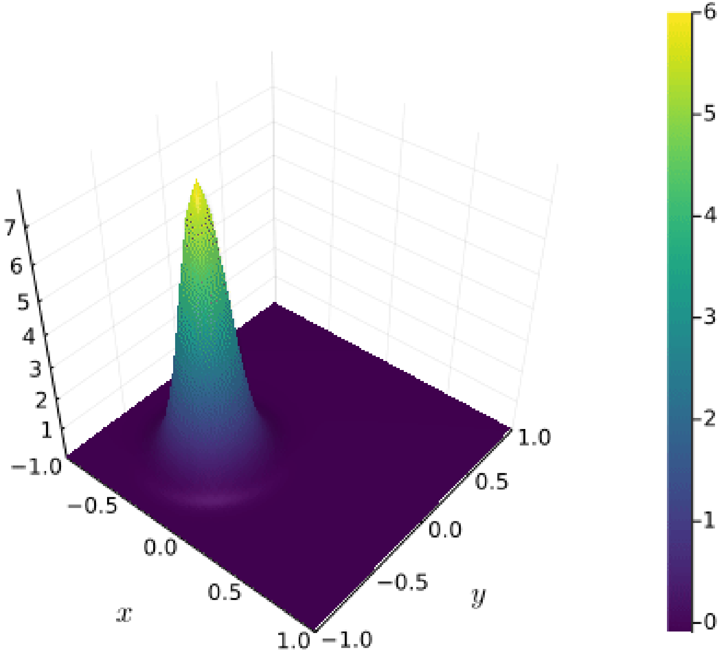
- 各エージェントの目標：

  1. 目標地点を目指す、2. 密度が大きい領域を避ける、 3. 障害物を避ける

結果：密度のピークを避けながら、分布が右上の目標地点に移動する妥当な結果が得られた



密度分布のプロット（密度ペナルティなし）



密度分布のプロット（密度ペナルティあり）

まとめと今後の課題

まとめ

- マルチエージェント制御問題に対応する平均場ゲームに対して差分数値計算法を提案した
  - 平均場ゲームが抱える 1. 非線形性と 2. 相互依存性について
    1. Cole-Hopf変換による線形化
    2. Fictitious-Play反復による依存性解消

  を実施し、実装容易なスキームを開発した
- 提案スキームの収束性を証明した
- 1次元と2次元の制御問題に対して数値計算を実施し、妥当な結果を得ることを確認した

今後の課題

- 証明は1次元の系に限る。多次元への拡張が課題

参考文献

- Jean-Michel Lasry and Pierre-Louis Lions, “Mean Field Games,” Japanese Journal of Mathematics 2, no. 1 (2007): 229–60.
- Pierre Cardaliaguet, “Notes on Mean Field Games,” 2010.
- Sarah Perrin et al., “Fictitious Play for Mean Field Games: Continuous Time Analysis and Applications,” Advances in Neural Information Processing Systems 33 (2020): 13199–213.
- Yves Achdou and Italo Capuzzo-Dolcetta, “Mean Field Games: Numerical Methods,” SIAM Journal on Numerical Analysis 48, no. 3 (2010): 1136–62.
- Olivier Guéant, “Mean Field Games Equations with Quadratic Hamiltonian: A Specific Approach,” Mathematical Models and Methods in Applied Sciences 22, no. 09 (2012): 1250022.
- E. Carlini and F. J. Silva, “A Fully Discrete Semi-Lagrangian Scheme for a First Order Mean Field Game Problem,” SIAM Journal on Numerical Analysis 52, no. 1 (2014): 45–67.
- Lars Ruthotto et al., “A Machine Learning Framework for Solving High-Dimensional Mean Field Game and Mean Field Control Problems,” Proceedings of the National Academy of Sciences 117, no. 17 (2020): 9183–93.

過去のMFGの数値計算との比較

- [Achdou et al. 2010] : MFGに対してForwardとBackwardの計算を直接反復する手法を提案。各反復で陰解法を用いている（そのため非線形方程式の求解が伴う）点、CH変換やFP反復を用いない点が、本研究と異なる。
- [Gueant 2012] : 本研究に最も近い。MFGをCH変換した系に対して反復解法を提案。対象となる系に移流項が含まれていない点、各反復で陰解法を用いる点、FP反復を用いず直接反復を用いている点が、本研究と異なる。
- [Carlini et al. 2014] : Semi-Lagrangianスキームを提案。ForwardとBackwardを陽解法で反復する点は同じだが、反復計算時の収束解析がなされていない。またCH変換やFP反復は用いない。
- [Ruthotto et al. 2020] : ニューラルネットを用いて変分問題を解く手法を提案。収束性解析はなされていない。